ReidemeisterとSingerの定理の一般化とその応用 (結び目と3次元多様体)

永瀬, 輝男

数理解析研究所講究録
346巻 1979年 11-16

ReidemeisterとSingerの定理の一般化とその応用

イリノイ大　　永瀬 輝男

1930年代にReidemeisterとSingerは,次の様な3次元多様体に関する基本定理を得た.

<u>定理</u>：　3次元閉多様体上の任意の2つのHeegaard分解は,互いにstablyに同値である.

このノートでは,involutionという立場から,上の定理を一般化出来ることを示し,その系として,3次元ホモロジー球面上の向きを保存するinvolutionに対し,signatureを定義出来ることを示す. その為に,いくつかの定義をする. 以下に於て,$Cl(\cdots)$とは$(\cdots)$の閉包を示し,$F(f)$は,写像fの不動点の集合を表わす.

$f : M^m \to M^m$をm次元多様体上のinvolutionとする. Nが$(m-1)$次元のMの部分多様体で,次の条件を満すとき,Nは<u>特性部分多様体</u>と呼ばれる：Mの2つの部分多様体UとVが存在して,

$U \cup V = M$, $U \cap V = \partial U = \partial V = N$, かつ $f(U) = V$.

特に，$m=3$ で，U と V が共にハンドルボディーである時，$(M; U, V, f)$ を M の特性Heegaard分解と呼ぶ．

$f, g : M^3 \longrightarrow M^3$ を M 上のinvolutionとし，$(M; U, V, f)$ と $(M; X, Y, g)$ を M の特性Heegaard分解とする．$(M; U, V, f)$ と $(M; X, Y, g)$ が基本ss同値であるとは，次の3種類の操作で，一方から他方に移行出来ることである．

(1)　M から M の上への同相写像 h が存在して，$g = h \circ f \circ h^{-1}$ かつ $h(U) = X$．

(2)　$f = g$ であり，U の中に次の様なdisk D が存在する：$\partial U \cap \mathrm{Int}\, D = \phi$，かつ $P = \mathrm{Cl}(\partial D - \partial U)$ は U に於てproperな曲線であり，$P \cap f(P) = \phi$．さらに，P の U 内の正則近傍 N で，次の条件を満すものがある：$N \cap f(N) = \phi$，かつ $X = \mathrm{Cl}(U - N) \cup f(N)$．

(3)　$f = g$ であり，M の中に次の条件を満す2つのdisk D_1 と D_2 が存在する：$D_1 \subset V$，$D_2 \subset U$，$D_1 \cap F(f) = \phi$，かつ $\partial D_1 \cap \partial D_2$ は ∂U の上でたゞ1つの交叉点より成る．さらに D_1 の正則近傍 N で，次の条件を満すものがある：$N \cap f(N) = \phi$，かつ $X = \mathrm{Cl}(U - f(N)) \cup N$．

(注)　(3)に於ての D_2 の役割は，変形結果が再び，Heegaard分解であることの保証の為のものです．

2つの特性Heegaard分解がss同値であるとは，上の基本

ss 同値の列で,一方から他方に移行出来ることである. すると,次の様な定理を証明出来る.

<u>定理1</u>: Mを向き付けられた3次元閉多様体とする. fとgをM上の向きを保存するinvolutionとする. このとき,2つの特性Heegaard 分解$(M;U,V,f)$と$(M;X,Y,g)$がss 同値である為の必要十分条件は次の条件を満すことである:M上の同相写像hが存在して,$h(\partial U)\cap\partial X$が$F(g)$の$\partial X$上でのある閉近傍を含むことである. 特に,$f$と$g$がconjugateな不動点を持たないinvolutionであるならば,$(M;U,V,f)$と$(M;X,Y,g)$は,ss 同値である.

Mが連結でない時,MのHeegaard分解を,Mの各連結成分上のHeegaard 分解の和とすることにするならば,不動点を持たないinvolutionに対して,定理1は次の様に拡張される.

<u>系</u>: Mを3次元閉多様体とする(連結でないかも知れないし,向き付け不可能かも知れない). fとgをM上の不動点を持たないconjugateなinvolutionとし,$(M;U,V,f)$と$(M;X,Y,g)$を広義の特性Heegaard 分解とする. すると,2つの特性Heegaard分解は,ss 同値である.

Mを3次元閉多様体で,M'をMのcopyとし,$h:M\longrightarrow M'$を同

相写像とする．写像 $f: M \cup M' \longrightarrow M \cup M'$ を次の様に定義する：

$$f(x) = \begin{cases} h(x) & もし\ x \in M \\ h^{-1}(x) & もし\ x \in M'. \end{cases}$$

すると，f は $M \cup M'$ 上の不動点を持たない involution である．$(M; U, V)$ を M の Heegaard 分解とする．すると，$(M \cup M'; U \cup h(V), V \cup h(U), f)$ は，$M \cup M'$ 上の広義の特性 Heegaard 分解である．

上の考察によって，上の定理は本来の Reidemeister と Singer の定理の一般化になることが次様にして証明出来る．$(M; U, V)$ と $(M; U', V')$ を M の Heegaard 分解とする．すると，定理の系より，$(M \cup M'; U \cup h(V), V \cup h(U), f)$ と $(M \cup M'; U' \cup h(V'), V' \cup h(U'), f)$ は ss 同値である．この ss 同値の変形を M 上に制限すれば，M 上で与えられた2つの Heegaard 分解の stable 同値を与える．

Browder と Livesay は，$\mathbb{Z}$-ホモロジー球面 M 上の不動点を持たない involution に対して，signature 不変量を特性部分多様体 N を用いて，次の様に定義した： U を M の部分多様体で，$\partial U = N$ となるものとする．$G = \mathrm{Ker}(i_* : H_1(N) \to H_1(U))$ とする，ここで，$i : N \hookrightarrow U$ は包含写像とする．$\varphi : G \times G \longrightarrow \mathbb{Z}$ を次の様に定める：$\varphi(x, y) = x \cdot f'_*(y)$，ここで・は交叉数

を示し，$f' = f|N$である．すると，φは2次形式であり，このφのsignature をfのsignature と呼ぶ．

しかし，このBrowderとLivesay の定義は，不動点を持つ様なinvolutionに対しては，成立しない．即ち，特性部分多様体の選び方によって，値が異なる．しかし，各特性部分多様体に対して，BrowderとLivesay による方法でsignatureを定義することは出来る．各特性Heegaard分解$(M; U, V, f)$に対し，∂Uによって決まるfのsignatureを$\sigma(M; U, V, f)$で示すことにする．

Mを向き付けられた3次元閉多様体で，$g: M \longrightarrow M$をM上の向きを保存するinvolutionで，$F(g) = \bigcup_{i=1}^{n} S(i)$となるものとする，ここで$S(i) \cong S^1$．$H$と$G$を$M$の特性部分多様体で，$F(g)$を含むものとする．このとき，$H$の$G$に対するねじれを次の様に定義する：　$T(i)$をMにおける$S(i)$の正則近傍で，$T(i) \cap H$と$T(i) \cap G$が共にproperな円管であるものとする．$L(i, H)$を$T(i) \cap H$の1つの境界とし，$L(i, G)$を$T(i) \cap G$の1つの境界とする．$L(i, H)$と$L(i, G)$は共にS^1に同相である．$T(i)$はMから導びかれた向きを持ち，$\partial T(i)$は，$T(i)$より導びかれた向き持つ．すると，$\partial T(i)$上に向き付けられた円$L(i)$と，$L(i, H)$と$L(i, G)$の向きで，$[L(i)] \cdot [L(i, H)] = [L(i)] \cdot [L(i, G)] = +1$となるものが存在する．ここで$[(\cdots)]$は向き付けられた$(\cdots)$のホモロ

ジー類を示し，・は$\partial T(i)$上での交叉数(intersection number) を示す． $m(i)=[L(i,H)]\cdot[L(i,G)]$ とするとき，n個の数字の組$(m(1),\cdots,m(n))$ をHのGに対するねじれと呼び，$tw(H;G)$で表わす． $\tau(H;G)=\sum_{i=1}^{n} m(i)$ とする．

定理２： Mを向き付けられた$\mathbb{Z}$-ホモロジー３次元球面とする． fをM上の向きを保存するinvolutionで，不動点を持つものとする． すると，

$$\sigma(M;X,Y,f)=\sigma(M;U,V,f)+\tau(\partial X;\partial U).$$

$\mathcal{H}(M,f)$をMの特性Heegaard分解$(M;U,V,f)$の中で，$\partial U-F(f)$が２つの連結成分よりなる様なものの全体とする． すると，Mが$\mathbb{Z}$-ホモロジー３次元球面の時は，$\mathcal{H}(M,f)\neq\phi$であり，$\mathcal{H}(M,f)$の任意の２つの元は，定理２より同一のsignatureを持つ． この値をfのsignatureと定義出来る．